



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX - TRAVAIL - PATRIE
UNIVERSITE DE DOUALA
ECOLE NATIONALE
SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
DE DOUALA
B.P. 2701 DOUALA
TEL. (237) 697 542 240
SITE WEB : WWW.ENSPD-UDO.CM

REPUBLIC OF CAMEROON
PEACE - WORK - FATHERLAND
THE UNIVERSITY OF DOUALA
NATIONAL HIGHER POLYTECHNIC
SCHOOL OF DOUALA
P.O.Box:2701 DOUALA
PHONE : (237) 697 542 240
EMAIL: CONTACT@ENSPD-UDO.CM



Année académique 2022-2023
EPD-SDIA-3222 : Optimisation Différentiable
Crédit : 4
Département : Sciences de l'Ingénieur

Examen, Juin 2023
Semestre 2
Niveau : 3 Durée : 2h00
Enseignant : P. Njionou Sadjang

Aucun document n'est autorisé et le barème est purement indicatif. Ce qui est affirmé sans preuve pourra être nié sans preuve.

EXERCICE 1

10 points

- Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a, b]$.
 - Ecrire l'équation de la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. [1pt]
 - Montrer que $\forall t \in]a, b[, f(t) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$. [1pt]
 - Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. [1pt]
 - Montrer que $(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$. [2pts]
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|$ et

$$g(x) = f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \quad h(x) = f(x) + M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$
 - Justifier l'existence de M . [1pt]
 - Montrer que g est convexe et que h est concave. [2pts]
 - En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a : [2pts]

$$|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

EXERCICE 2

10 points

- On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.
 - Déterminer les points critiques de f et de g . [2pts]
 - En reconnaissant le début de développement d'un carré, étudier les extremums locaux de f . [1,5pt]
 - En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g . [1,5pt]
- Trouver les extremums de la fonction $f(x, y, z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2$ soumise à la contrainte $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. [3pts]
- Trouver le(s) extremums de la fonction $f(x, y) = (x-1)^2 + y - 2$ soumise aux contraintes $-x + y - 1 = 0$ et $x + y - 4 \leq 0$. [3pts]

CC D'optimisation différentiable I . Durée: 02 heures

N.B. Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1: Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + x^n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2$.
Montrer que 0 est le seul point critique de f , que f y atteint un minimum local strict, mais pas global.

Exercice 2: Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Min} f(x) \\ \text{S.C.} \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p \end{cases} \end{cases}$$

où les fonctions $f, g_i, h_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$ sont toutes définies et continûment différentiables sur $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

1. Quand dit-on qu'un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un point régulier pour le problème (P) ?
2. Quand dit-on qu'une contrainte d'inégalité est saturée ?
3. Quand dit-on que (P) est un problème convexe ?
4. Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker
5. Montrer que dans le cas convexe le système de KKT est un système de conditions suffisantes

Exercice 3: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1. Dans cette question, on veut montrer que f est coercive. Pour cela, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ et $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

(a) Trouver deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha \|(x, y)\| \leq \|(x, y)\|_\infty \leq \beta \|(x, y)\|, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Montrer que $x^4 + y^4 \geq \|(x, y)\|_\infty^4, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) Montrer que $f(x, y) \geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2$

(d) En déduire de f est coercive.

2. Montrer que le problème

$$(P) \quad \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

possède au moins une solution.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?